

1. Izvršiti kodiranje poruke 1100 pomoću generišuće matrice Hemingovog koda (7,4) i kontrolne bite postaviti:

- a) Na pravilnom binarnom rasporedu u kodu
- b) Na posljednjim pozicijama

Takođe, izvršiti dekodiranje poruke 0010111 pomoću kontrolne matrice ovog koda za slučajeve a) i b).

Rješenje:

- a) Kontrolni biti na pravilnom binarnom rasporedu:

U tom slučaju, generišuća matrica je jednaka:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad i_1 \quad c_3 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4$

$$C = i \cdot G = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

- b) Kontrolni biti na poslednjim pozicijama:

U tom slučaju, generišuća matrica je jednaka:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$$C = i \cdot G = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

Dekodiranje poruke 0010111:

a) U slučaju pravilnog binarnog rasporeda

$$S = C \cdot H^T$$

Kontrolna matrica H u slučaju normalnog rasporeda je:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = C \cdot H^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]$$

Na osnovu sindroma 111 može se zaključiti da je došlo do greške na 7 bitu u kodiranoj riječi.

Nakon ispravljanja pogrešnog bita, kodna riječ $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$. Dekodiranjem (uklanjanjem kontrolnih bita sa 1,2 i 4 pozicije) se dobija da je originalna poruka:

$$i = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$$

b) U slučaju kada su kontrolni biti na poslednjim pozicijama

$$S = C \cdot H^T = C \cdot [P^T \ \vdots \ I]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = C \cdot H^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

Na osnovu sindroma 100 može se zaključiti da je došlo do greške na 5 bitu u kodiranoj riječi.

Nakon ispravljanja pogrešnog bita, kodna riječ $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$. Dekodiranjem (uklanjanjem kontrolnih bita sa 5,6 i 7 pozicije) se dobija:

Da je originalna poruka:

$$i = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

2. Izvršiti kodiranje poruke 1 0 1 0 1 1 pomoću generišuće matrice trougaonog koda (10,6) i kontrolne bite postaviti na poslednjim pozicijama u kodnoj riječi.

Takođe, izvršiti dekodiranje poruke 1 0 1 0 1 0 0 1 0 pomoću kontrolne matrice ovog koda.

Rješenje:

i_1	i_2	i_3	c_1
i_4	i_5	c_2	
i_6	c_3		
c_4			

$$c_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$$

$$c_2 = i_4 \oplus i_5 \oplus i_3$$

$$c_3 = i_6 \oplus i_2 \oplus i_5$$

$$c_4 = i_1 \oplus i_4 \oplus i_6$$

$$C = i \cdot P = i \cdot [I \quad P]$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Dekodiranje poruke 1010100010:

$$S = C \cdot H^T$$

$$H = [P^T \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = C \cdot H^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Na osnovu sindroma 0001 može se zaključiti da je do greške došlo na 10-tom bitu. Ispravljena riječ je:

$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$. Poslije dekodiranja (uklanjanja kontrolnih bita) dobijamo dekodiranu poruku:

$$i = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] .$$

3. Izvršiti kodiranje poruke 111001 pomoću generišuće matrice pravougaonog koda (12,6) i kontrolne bitove postaviti na posljednjim pozicijama u kodu.

Takođe, izvršiti dekodiranje poruke 110011011001 pomoću kontrolne matrice ovog koda.

Rješenje:

i_1	i_2	i_3	c_1
i_4	i_5	i_6	c_2
c_3	c_4	c_5	c_6

$$c_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$$

$$c_2 = i_4 \oplus i_5 \oplus i_6$$

$$c_3 = i_1 \oplus i_4$$

$$c_4 = i_2 \oplus i_5$$

$$c_5 = i_3 \oplus i_6$$

$$c_6 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_6$$

$$C = i \cdot G = i \cdot [I \quad P] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Dekodiranje poruke 110011011001:

$$S = C \cdot H^T = C \cdot [P^T \quad I]^T$$

$$S = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

Na osnovu sindroma 0 1 0 0 1 1 može se zaključiti da je došlo do greške na 6 bitu. Nakon ispravke, kodirana poruka je $C = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$. Poslije dekodiranja (uklanjanja kontrolnih bita) dobijamo dekodiranu poruku:

$$i = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$